# PENGGUNAAN *MEAN SQUARE ERROR* (*MSE*) DALAM MENENTUKAN PENDUGA RASIO YANG EFISIEN PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA

## TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Jurusan Matematika

Oleh:

**YETTI MURNI**
**10654004500**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**
**PEKANBARU**

**2010**

# PENGGUNAAN *MEAN SQUARE ERROR* (*MSE*) DALAM MENENTUKAN PENDUGA RASIO YANG EFISIEN PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA


**YETTI MURNI**
**10654004500**



Tanggal Sidang: 05 Juli 2010
Periode Wisuda: Oktober 2010



Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru


## ABSTRAK


Penelitian ini akan membahas tentang penduga rasio yang effisien pada sampling acak berstrata. Dari beberapa penduga rasio pada sampling acak berstrata, penulis mengambil tiga penduga rasio yaitu penduga rasio gabungan, penduga rasio yang diajukan oleh Singh dan Taylor serta penduga rasio yang diajukan oleh Singh dan Uphadayaya. Disini penulis ingin menunjukkan bahwa penduga rasio yang diajukan oleh Singh dan Uphadayaya pada sampling acak berstrata effisien atau tidaknya. Untuk menunjukkannya dapat dilihat dari MSE masing-masing penduga. MSE yang terkecil adalah penduga yang efisien.



**Kata Kunci:** *Mean Square Error* (*MSE*), Penduga Rasio, Sampling Acak Berstrata.

# PENGGUNAAN *MEAN SQUARE ERROR* (MSE) DALAM MENENTUKAN PENDUGA RASIO YANG EFISIEN PADA SAMPLING ACAK BERSTRATA


**YETTI MURNI**
**10654004500**



*Date of Final Exam* : *July, 05* $^{th}$ *2010*
*Graduation Ceremony Period : Oktober , 2010*



*Mathematic Departement*
*Faculty of Sciences and Technology*
*State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau*
*Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru*


## *ABSTRACT*


This research is focused on the efficient ratio estimators in stratified random sampling. From some ratio estimators in stratified random sampling, the authors take three estimators estimate the ratio of the combined ratio, ratio estimators proposed by Singh and Taylor and ratio estimators proposed by Singh and Uphadayaya. Here the author wants to show that the ratio estimators proposed by Singh and Uphadayaya on stratified random sampling efficient or not. To show it can be seen from the MSE of each estimator. The smallest MSE is an efficient estimator



***Keyword*** *:* Mean Square Error (MSE), Parameter Ratio, Stratified Random Sampling

# DAFTAR ISI


Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN.......................................................................... ii

LEMBAR PENGESAHAN ........................................................................ iii

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL.............................. iv

LEMBAR PERNYATAAN ......................................................................... v

LEMBAR PERSEMBAHAN ..................................................................... vi

ABSTRAK .................................................................................................. vii

*ABSTRACT* ................................................................................................. viii

KATA PENGANTAR ................................................................................. ix

DAFTAR ISI ................................................................................................ xi

DAFTAR LAMBANG ................................................................................ xiii

BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang ............................................................................ I-1

1.2 Perumusan Masalah ..................................................................... I-2

1.3 Tujuan Penelitian ......................................................................... I-2

1.4 Batasan Masalah .......................................................................... I-2

1.5 Sistematika Penulisan .................................................................. I-2

BAB II. LANDASAN TEORI

2.1 Variansi dan Ekspektasi .............................................................. II-1

2.2 Penduga Rata-Rata pada Sampling Acak Sederhana ................ II-2

2.3 Penduga Rata-Rata pada Sampling Acak Berstrata .................. II-5

2.4 Penduga Rasio ............................................................................. II-10

2.5 MSE ............................................................................................. II-11

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV. PEMBAHASAN DAN HASIL

4.1 Bias dan MSE Penduga Rasio Gabungan ................................ IV-1

4.2 Bias dan MSE Penduga Rasio Singh dan Taylor.......................IV-7

4.3 Bias dan MSE Penduga Rasio Upadhayaya dan Singh............. IV-13

4.4 Perbandingan MSE...................................................................... IV-40

4.5 Aplikasi ........................................................................................ IV-42

BAB V. PENUTUP

5.1 Kesimpulan ..................................................................................... V-1

5.2 Saran.................................................................................................. V-1

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 LATAR BELAKANG

Setiap peneliti memiliki keterbatasan biaya, waktu, dan tenaga untuk meneliti objek yang ingin diteliti. Oleh karena itu untuk menghemat biaya, waktu, serta tenaga tersebut adalah dengan cara meneliti sebagian dari objek yang ingin diteliti. Sebagai contoh seorang peneliti diminta mengamati konsumen dari suatu produk yang dihasilkan yang tersebar diseluruh Indonesia, maka tidak mungkin peneliti tersebut dapat mengamati semua konsumen pengguna produk yang dihasilkan karena adanya keterbatasan waktu, biaya dan tenaga. Maka peneliti diharuskan mengamati sebagian dari konsumen yang dapat mewakili keseluruhan konsumen. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode pengambilan sampel yang dapat mewakili keseluruhan konsumen, serta memberikan ketelitian hasil penelitian. Salah satu untuk peningkatkan pendugaan digunakan suatu metode pendugaan yaitu metode rasio, dalam metode rasio untuk penduga yang sesuai adalah bias.

Bentuk umum rata-rata populasi penduga rasio untuk berstrata adalah $\bar{y}_{Rc} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X}$ , dan $\bar{y}_{Rc}$ adalah rata-rata populasi penduga rasio , $\bar{y}$ dan $\bar{x}$ adalah rata-rata sampel, dan $\bar{X}$ adalah rata-rata populasi. Berdasarkan jurnal ”*An Improvement in Estimating the Population Mean by Using the Correlation Coefficient*”, yang menggunakan dua penduga rasio menurut Tailor dan Singh dan penduga rasio menurut N.Upadhayaya dan Singh, dan. Kedua penduga tersebut merupakan penduga bias untuk rata-rata populasi. Maka untuk mendapatkan penduga rasio yang efisien adalah dengan menghitung *Mean Square Error* (MSE) untuk masing-masing penduga. Dengan demikian penulis dapat menunjukkan apakah penduga rasio menurut N.Upadhayaya dan Singh adalah penduga rasio yang efisien atau bukan efisien pada sampling acak berstrata. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahasnya dalam tugas akhir yang diberi judul

***”Penggunaan Mean Square Error (MSE) dalam Menentukan Penduga Rasio yang Efisien pada Sampling Acak Berstrata ”.***

## 1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian latar belakang masalah di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan MSE dari masing-masing penduga rasio.
2. Bagaimana menentukan penduga rasio yang efisien.

## 1.3 TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Mendapatkan MSE dari masing-masing penduga rasio.
2. Dapat menentukan penduga rasio yang efisien.

## 1.4 BATASAN MASALAH

Tugas akhir ini membahas mengenai MSE pada masing-masing penduga rasio serta menentukan penduga rasio yang efisien pada sampling acak berstrata saja.

## 1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan tugas akhir ini, adalah sebagai berikut:

**BAB I Pendahuluan**

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

**BAB II Landasan Teori**

Berisi teori-teori yang mendukung untuk mendapatkan MSE pada penduga rasio.

**BAB III Metodologi Penelitian**

Berisi mengenai studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan sampling acak berstrata.

**BAB IV Pembahasan**

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

**BAB V Penutup**

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran.

# BAB II

# LANDASAN TEORI

## 2.1. Variansi dan Ekspektasi

**Definisi 2.1 (Rado, 2008)** Misalkan *Y* adalah variabel acak diskrit dengan fungsi peluang *p(y)* maka nilai harapan dari *Y*,atau *E(Y)* didefinisikan sebagai:

$$E(Y) = \sum_{y} yp(y) \qquad (2.1)$$

Sifat – sifat dari ekspektasi sebagai berikut :

a. Apabila $a$ dan $b$ merupakan suatu konstanta, maka:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

b. Jika $b \in R$, maka $E(b) = b$

c. Jika $a$ adalah konstanta dan $X$ merupakan suatu variabel acak, maka:

$$E(aX) = aE(X).$$

d. Jika $a$ dan $b$ merupakan suatu konstanta dan $X$ dan $Y$ adalah dua variabel acak bebas, maka: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$

**Lemma 2.2 (Edward, 1995)** $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

**Bukti:**

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - EX)^2 \\ &= E\{X^2 - 2XEX + (EX)^2\} \\ &= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 2.3 (Edward, 1995)** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ (2.2)

**Bukti:**

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 \\ &= E[a(X - EX)]^2 \\ &= a^2 E(X - EX)^2 \end{aligned}$$

$$Var(aX+b)=a^2Var(X). \quad \blacksquare \tag{2.3}$$

**Definisi 2.4 (J. Supranto, 1992)** Misalkan dari suatu populasi dengan $N$ elemen diambil sampel sebanyak n elemen, maka akan diperoleh $K$ perkiraan, karena ada $K$ sampel. Jika theta $(\theta)$ adalah simbol parameter dari suatu populasi, maka theta topi $(\hat{\theta})$ adalah simbol perkiraan dari sampel. $\hat{\theta}$ dikatakan penduga tak bias dari $\theta$, jika:

$$E(\hat{\theta})=\theta \tag{2.4}$$

**Definisi 2.5 (J. Supranto, 1992)** Bias untuk penduga $\hat{\theta}$ adalah:

$$B(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta \tag{2.5}$$

**Definisi 2.6 (J. Supranto, 1992)** Variansi $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2. \tag{2.6}$$

## 2.2.Penduga Rata-Rata pada Sampling Acak Sederhana

Jika suatu sampel dengan $n$ elemen dipilh dari suatu populasi dengan $N$ elemen sedemikian rupa sehingga setiap kemungkinan sampel dengan $n$ elemen mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih, prosedur sampling yang demikian disebut sampling acak sederhana (*simple random sampling*). Sampel yang dipilih dengan cara demikian disebut sampel acak sederhana (*simple random sample*).

**Teorema 2.7 (Des Raj, 1971)** Variansi dari rata – rata sampel $\bar{y}$ dari sampel acak sederhana adalah :

$$V(\bar{y})=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)S_y{}^2=(1-f)\frac{S_y{}^2}{n} \tag{2.7}$$

dimana $f$ merupakan fraksi penarikan sampel, dengan $f = \frac{n}{N}$, dan variansi $y_i$ adalah:

$$S_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})^2}{N-1} \tag{2.8}$$

**Bukti:**

$$V(\overline{y}) = E(\overline{y} - \overline{Y})^2$$

$$= E(\overline{y}^2 - 2\overline{y}\overline{Y} + \overline{Y}^2)$$

$$= E(\overline{y}^2) - \overline{Y}^2 \tag{2.9}$$

karena $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} y_i$ , maka

$$E(\overline{y}^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2$$

$$= E\left(\frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} y_i y_j)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E(y_i{}^2) + \sum_{i\neq j=1}^{n} E(y_i y_j)\right) \tag{2.10}$$

berdasarkan persamaan (2.1), maka persamaan (2.10) diperoleh sebagai berikut:

$$E(y_i{}^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i{}^2) \tag{2.11}$$

serta,

$$\sum_{i=1}^{n} E(y_i{}^2) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i{}^2)\right)$$

$$= \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i{}^2) \quad ` \tag{2.12}$$

dengan variansi $y_i$ dalam sebuah populasi pada persamaan (2.8) diberikan sebagai berikut:

$$S_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})^2}{N-1}$$

$$S_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i{}^2) - N\overline{Y}^2}{N-1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} = N\bar{Y}^2 + (N-1)S_y^{\,2} \tag{2.13}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (2.13) ke persamaan (2.12), diperoleh sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} E(y_i^{\,2}) = \frac{n}{N}(N\bar{Y}^2 + (N-1)S_y^{\,2} \tag{2.14}$$

untuk memperoleh $\sum_{i \neq j=1}^{n} E(y_i, y_j)$ pada persamaan (2.10), terlebih dahulu ditentukan

$$E(y_1 y_j) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j=1}^{N} y_i y_j \tag{2.15}$$

dan,

$$\bar{Y}^2 = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \right)^2$$

sehingga:

$$\bar{Y}^2 = \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} + \sum_{i \neq j=1}^{N} y_i y_j \right) \tag{2.16}$$

dengan proses aljabar dari persamaan (2.16) diperoleh:

$$\sum_{i \neq j=1}^{N} y_i y_j = N^2 \bar{Y}^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} \tag{2.17}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (217) ke persamaan (2.13), diperoleh:

$$\sum_{i \neq j=1}^{N} y_i y_j = N^2 \bar{Y}^2 - (N\bar{Y}^2 + (N-1)S_y^{\,2} \tag{2.18}$$

dengan proses aljabar, diperoleh sebagai berikut:

$$\sum_{i \neq j=1}^{N} y_i y_j = (N-1)(N\bar{Y}^2 - S_y^{\,2}) \tag{2.19}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (2.15) ke persamaan (2.19), diperoleh:

$$E(y_i y_j) = \frac{1}{N}(N\bar{Y}^2 - S_y^{\,2}) \tag{2.20}$$

dan,

$$\sum_{1 \neq j=1}^{n} E(y_i y_j) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \frac{1}{N}(N\bar{Y}^2 - S_y^{\,2}) \tag{2.21}$$

$$= \frac{1}{N}(N(n(n-1)\overline{Y}^2) - (n(n-1)S_y{}^2)) \qquad (2.22)$$

kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (2.14) dan persamaan (2.22) ke persamaan (2.10), diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}^2) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{N}(N\overline{Y}^2) + (N-1)S_y{}^2\right) + \left(\frac{n}{N}(N(n(n-1)\overline{Y}^2) - (n(n-1)S_y{}^2)\right)$$

$$= \overline{Y}^2 + \frac{1}{nN}(N-n)S_y{}^2 \qquad (2.23)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (2.23) ke persamaan (2.9), diperoleh:

$$V(\bar{y}) = \overline{Y}^2 + \frac{1}{nN}(N-n)S_y{}^2 - \overline{Y}^2$$

dengan,

$f = \frac{n}{N}$, diperoleh sebagai berikut:

$$= (1-f)\frac{S_y{}^2}{n} \qquad \blacksquare$$

### 2.3. Penduga Rata-Rata pada Sampling Acak Berstrata

**Definisi 2.8 (J. Supranto, 1992)** Sampling acak berstrata adalah sampling dimana sampelnya diperoleh dengan cara sebagai berikut :

1. Populasi dipecah atau dibagi menjadi populasi yang lebih kecil disebut stratum.
2. Pembentukan stratum harus sedemikian rupa sehingga setiap stratum homogen atau relatif homogen.
3. Setiap stratum kemudian diambil sampel secara acak dan dibuat perkiraan untuk mewakili stratum yang bersangkutan.
4. Perkiraan secara menyeluruh diperoleh secara gabungan.

**Definisi 2.9 (William, 1991)** Dalam penarikan sampel berstrata populasi $N$ unitnya pertama-tama dibagi kedalam subpopulasi, masing-masing

$N_1, N_2, N_3, ..., N_k$ unit, dan bila seluruh subpopulasi dijumlahkan, maka diperoleh:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_k$$

sehingga dapat drumuskan sebagai berikut :

$$N = \sum_{h=1}^{k} N_h \qquad (2.24)$$

**Definisi 2.10 (William, 1991)** Dan ukuran sampel didalam setiap stratum ke *h* dinotasikan dengan $n_h$, dengan $h = 1,2,3,...$ jika seluruh sampel dijumlahkan, maka diperoleh :

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + .... + n_h$$

sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$n = \sum_{h=1}^{k} n_h \qquad (2.25)$$

dimana *k* adalah jumlah atau banyaknya stratum.

Adapun sifat-sifat perkiraan pada sampling acak berstrata adalah perkiraan rata-rata yang digunakan dalam penarikan sampel acak berstrata adalah sebagai berikut:

$$\bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{y}_h}{N} = \sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{y}_h \qquad (2.26)$$

dimana $= N_1 + N_2 + ... + N_k$. Perkiraan $\bar{y}_{st}$ tidak sama dengan rata-rata sampel biasa. Rata-rata sampel $\bar{y}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{h=1}^{k} n_h \bar{y}_h}{n} \qquad (2.27)$$

Perbedaannya adalah $\bar{y}_{st}$ diperkirakan dari lapisan secara individu dengan koreksi penimbangnya $N_h / N$. Hal ini berarti bahwa $\bar{y}$ sama dengan $\bar{y}_{st}$ asalkan setiap lapisan

$$\frac{n_h}{n}=\frac{N_h}{N} \text{ atau } \frac{n_h}{N_h}=\frac{n}{N} \text{ atau } f_h = f \tag{2.28}$$

Ini berarti bahwa fraksi penarikan sampel adalah sama untuk seluruh lapisan.

**Teorema 2.11 (William, 1991)** Jika dalam setiap lapisan, perkiraan sampelnya $\bar{y}_h$ adalah tidak bias, maka $\bar{y}_{st}$ adalah sebuah sebuah perkiraan yang tidak bias dari rata-rata populasi $\bar{Y}$ .

**Bukti:**

berdasarkan persamaan (2.26), diperoleh sebagai berikut:

$$\bar{y}_{st}=\frac{\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{y}_h}{N}=\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{y}_h$$

selanjutnya berdasarkan persamaan (2.4), akan dibuktikan sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{st})=\bar{Y} \tag{2.29}$$

untuk $E(\bar{y}_{st})$ diperoleh,

$$E(\bar{y}_{st})=E\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{y}_h$$

$$=\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{Y}_h$$

untuk $\bar{Y}$ diperoleh,

$$\bar{Y}=\frac{\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{Y}_h}{N}$$

$$=\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{Y}_h$$

maka terbukti,

$$E(\bar{y}_{st})=\bar{Y} \quad \blacksquare$$

**Definisi 2.12 (Ronald, 1995)** Kovariansi $X$ dan $Y$ dengan rata-rata masing-masing $\mu_x$ dan $\mu_y$ dinotasikan dengan *Cov(X,Y)* adalah sebagai berikut:

$$Cov(X,Y) = E((X-\mu_x)(Y-\mu_y)) \tag{2.30}$$

Berdasarkan definisi (2.12), maka $Cov(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st})$ adalah sebagai berikut:

$$E\left[(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})\right] = E\left[\left(\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{y}_h - \sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{Y}_h\right)\left(\sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{x}_h - \sum_{h=1}^{k} \omega_h \bar{X}_h\right)\right]$$

$$= E\left(\sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} (\bar{y}_h - \bar{Y})(\bar{x}_h - \bar{X})\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \left[E(\bar{y}_h - \bar{Y})(\bar{x}_h - \bar{X})\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \left[\sqrt{E(\bar{y}_h - \bar{Y})^2 (\bar{x}_h - \bar{X})^2}\right]$$

berdasarkan persamaan (2.7), diperoleh:

$$E\left[(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X})\right] = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \sqrt{\left(\frac{S_{yh}}{n_h}\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\left(\frac{S_{xh}}{n_h}\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \sqrt{S_{yh} S_{xh}}$$

selanjutnya berdasarkan persamaan (2.8), diperoleh:

$$E\left[(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X})\right] = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2}{N_h - 1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2}{N_h - 1}\right)}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{1}{N_h - 1} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{X})^2\right)}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \gamma_h S_{yxh}$$

Sehingga $Cov(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st})$ adalah sebagai berikut:

$$Cov(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2} \gamma_h S_{yxh} \qquad \blacksquare \tag{2.31}$$

**Teorema 2.13 (William, 1991)** Untuk penarikan sampel acak berstrata, variansi dari perkiraan $\bar{y}_{st}$ adalah:

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{k} N_h (N_h - n_h)\frac{S_h^{\ 2}}{n_h} = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h S_h^{\ 2} \qquad (2.32)$$

**Bukti :**

Perkiraan rata-rata yang digunakan dalam penarikan sampel acak berstrata adalah:

$$\bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{y}_h}{N}`$$

dan,

$$V(\bar{y}_{st}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} N_h \bar{y}_h}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N^2} V\left(\sum_{h=1}^{k} N_h \bar{y}_h\right)$$

$$= \frac{1}{N^2} V\left(N_1\bar{y}_1 + N_2\bar{y}_2 + N_3\bar{y}_3 + ....N_k\bar{y}_k\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(V(N_1\bar{y}_1) + V(N_2\bar{y}_2) + V(N_3\bar{y}_3) + ... + V(N_k\bar{y}_k)\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(N_1^{\ 2} V\bar{y}_1 + N_2^{\ 2} V\bar{y}_2 + N_3^{\ 2} V y_3 + .... + N_k^{\ 2} V y_k\right)$$

berdasarkan persamaan (2.7), diperoleh sebagai berikut:

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\left(N_1^{\ 2}\frac{s_1^{\ 2}}{n_1}\left(\frac{N_1 - n_1}{N_1}\right) + N_2^{\ 2}\frac{S_2^{\ 2}}{n_2}\left(\frac{N_2 - n_2}{N_2}\right) + ...N_k^{\ 2}\frac{S_k^{\ 2}}{n_k}\left(\frac{N_k - n_k}{N_k}\right)\right)$$

sehingga:

$$V(\bar{y}_{st}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{k} N_h^{\ 2}\frac{S_h^{\ 2}}{n_h}\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)$$

karena,

$$\omega_h = \frac{N_h}{N}\,,\quad \gamma_h = \frac{1-{n_h}/{N_h}}{n_h}$$

maka diperoleh:

$$V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\;2} \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \frac{S_h^{\;2}}{n_h}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\;2} \gamma_h S_h^{\;2}\,. \blacksquare \tag{2.33}$$

### 2.4. Penduga Rasio

**Definisi 2.14 (C.Kadilar, dkk, 2003)** Penduga rasio sampling acak berstrata atau gabungan:

$$\bar{y}_{Rc} = \hat{R}_c \bar{X} \tag{2.34}$$

**Definisi 2.15 (C.Kadilar,dkk, 2006)** Penduga rasio yang diajukan oleh Singh dan Tailor adalah:

$$\bar{y}_{st} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}+\rho}(\bar{X}+\rho) \tag{2.35}$$

dimana $\rho$ adalah koefisien korelasi.

**Definisi 2.16 (C.Kadilar,dkk, 2006)** Penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh dengan menggunakan koefisien korelasi adalah:

$$\bar{y}_{pr1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}C_x + \rho}(\bar{X}C_x + \rho) \tag{2.36}$$

dimana $C_x$ adalah koefisien variansi.

$$\bar{y}_{pr2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + C_x}(\bar{X}_{\rho} + C_x) \tag{2.37}$$

$$\bar{y}_{pr3} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho) \tag{2.38}$$

dimana $\beta_2(x)$ adalah koefisien kurtosis.

$$\bar{y}_{pr4} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)}(\bar{X}\rho + \beta_2(x)) \tag{2.39}$$

## 2.5. MSE

**Definisi 2.17 (frederik ,dkk, 2005)** Jika T adalah penduga dari parameter $\theta$. Maka mean square error dari T adalah $MSE(T) = E\left[(T-\theta)^2\right]$. Misalkan $T_1$ dan $T_2$ adalah dua penduga dari $\theta_1$ dan $\theta_2$. Dan jika $MSE(T_1) < MSE(T_2)$ maka penduga $T_1$ lebih efisien dari $T_2$. (2.40)

**Definisi 2.18 (C. Kadilar, 2006)** MSE dari penduga dapat diperoleh dengan menggunakan deret taylor untuk dua variabel, dan berhenti pada pangkat kedua, maka MSE dari penduga yang diajukan didefinisikan :

$$MSE\left[f(\bar{x},\bar{y})\right] \approx E\left( (\bar{x}-\bar{X})\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{x}}\bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + (\bar{y}-\bar{Y})\frac{\partial f(\bar{x},\bar{y})}{\partial \bar{y}}\bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} \right)^2 \tag{2.41}$$

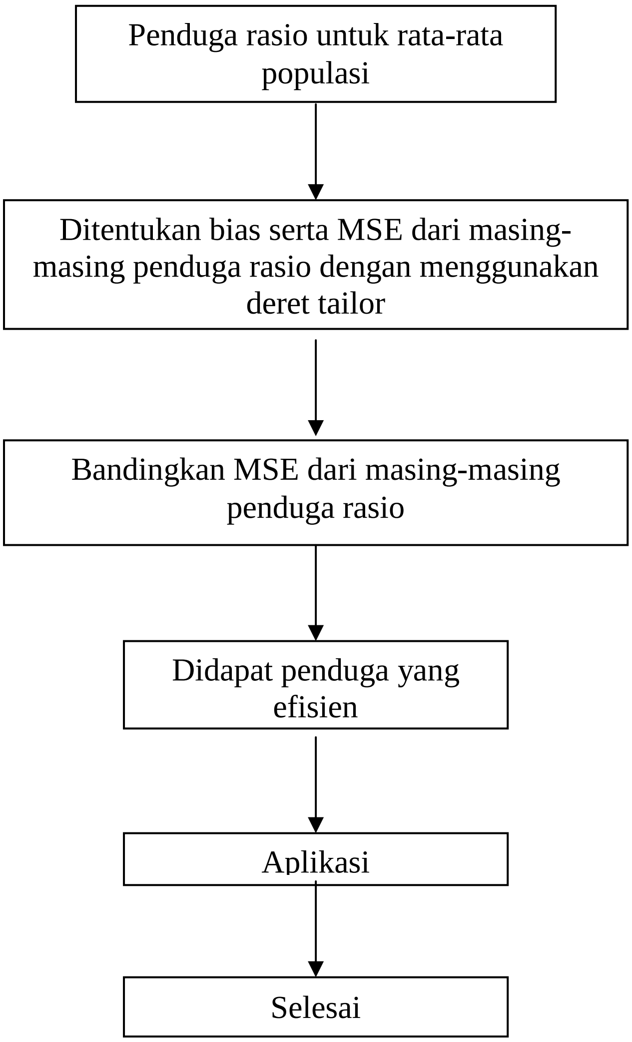
# BAB III

# METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan adalah studi literatur, yaitu merujuk pada penelitian sebelumnya dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan bias dan MSE dari masing-masing penduga rasio.
2. Membandingkan MSE dari masing-masing penduga rasio.
3. Penduga rasaio yang dikatakan effisien adalah penduga rasio yang MSE nya kecil dari penduga rasio lainnya

Adapun alur pengerjaan tugas akhir ini dituangkan ke dalam bagan sebagai berikut:




**Gambar 3.1** ***flowchart*** **Metodologi Penelitian**

# BAB IV
# PEMBAHASAN DAN HASIL

Berdasarkan ilmu statistik, pengertian parameter yaitu sembarang nilai yang menjelaskan ciri dari suatu populasi, dengan mengetahui nilai parameter tersebut, dapat diperkirakan hasil yang sebenarnya yang mendekati dengan nilai dari populasi dengan rentang kesalahan yang telah ditentukan antara sampel dan populasi. Karakteristik statistik dari sampel harus menjadi penduga (*estimate*) yang dapat diandalkan, dan mencerminkan parameter populasi sedekat mungkin dengan tingkat kesalahan (*error margin*) yang kecil.

## 4.1 Bias dan *Mean Square Error* Penduga Rasio Gabungan

Berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio gabungan diperoleh sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$= E(\hat{\theta} - \theta) \qquad (4.1)$$

dengan penduga rasio gabungan adalah:

$$\bar{y}_{RC} = \hat{R}_C \bar{X} \qquad (4.2)$$

dimana $\hat{R}_C = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.2) maka persamaan (4.1) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{RC}) = E\left[(\bar{y}_{RC} - \bar{Y})\right] \qquad (4.3)$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.3) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{RC} - \bar{Y}) = E\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X} - \bar{X}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right)$$

karena $R_C = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{RC} - \bar{Y}) = \bar{X}E\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} - R_C\right)$$

$$= \bar{X}E\left(\frac{1}{\bar{x}_{st}}(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st})\right) \tag{4.4}$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.4) $\frac{1}{\bar{x}_{st}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{\bar{x}_{st}} = \frac{1}{\bar{X} + (\bar{x}_{st} - \bar{X})}$$

$$= \frac{1}{\bar{X}}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{X} + (\bar{x}_{st} - \bar{X})}\right)$$

$$= \frac{1}{\bar{X}}\left(1 + \frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^{-1} \tag{4.5}$$

persamaan (4.5) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!}\theta + \frac{f''(\theta)}{2!}\theta^2 + .... \tag{4.6}$$

dimisalkan:

$$\theta = \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)$$

sehingga persamaan (4.5) diperoleh:

$$f(\theta) = (1+\theta)^{-1}$$

dengan turunaanya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1+\theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1+\theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.6) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}\theta + \frac{f^{''}(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \tag{4.7}$$

substitusikan $\theta = \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)$ kedalam persamaan (4.7), diperoleh:

$$\left(1 + \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right) + \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^2 - ...... \tag{4.8}$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left(1 + \frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right) \tag{4.9}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.9) ke persamaan (4.5) diperoleh:

$$\frac{1}{\bar{x}_{st}} = \frac{1}{\bar{X}}\left(1 - \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right) \tag{4.10}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.10) ke persamaan (4.4), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{RC} - \bar{Y}) \approx \bar{X}E\left(\frac{1}{\bar{X}}\left(1 - \left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right)(\bar{y}_{st} - R_C\bar{x}_{st})\right)$$

$$\approx \bar{X}E\left[\frac{1}{\bar{X}}\left((\bar{y}_{st} - R_C x_{st}) - \bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right) + R_C\bar{x}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right)\right] \tag{4.11}$$

$$\approx E\left[(\bar{y}_{st} - R_C x_{st}) - \bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right) + R_C\bar{x}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\right] \tag{4.12}$$

karena:

$$E(\bar{y}_{st} - R\bar{x}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{x}_{st}) = 0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{st} - \bar{Y}) \approx E\left[-\bar{y}_{st}(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}) + R_C\bar{x}_{st}(\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}})\right] \tag{4.13}$$

kemudian persamaan (4.13) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$E(\bar{y}_{st}(\bar{x}_{st}-\bar{X})) = E(\bar{y}_{st}\bar{x}_{st}-\bar{y}_{st}\bar{X})$$

$$= E(\bar{y}_{st}\bar{x}_{st}-\bar{y}_{st}\bar{X}) - E(\bar{Y}\bar{x}_{st}-\overline{YX})$$

$$= E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(\bar{x}_{st}-\bar{X}) \qquad (4.14)$$

ruas kanan diperoleh:

$$E(\bar{x}_{st}(\bar{x}_{st}-\bar{X})) = E(\bar{x}_{st}{}^{2}-\bar{x}_{st}\bar{X})$$

$$= E(\bar{x}_{st}{}^{2}-\bar{x}_{st}\bar{X}-\bar{x}_{st}\bar{X}+\bar{x}_{st}\bar{X})$$

$$= E(\bar{x}_{st}{}^{2}) - 2E(\bar{x}_{st}\bar{X}) + E(X^{2})$$

$$= E(\bar{x}_{st}-\bar{X})^{2} \qquad (4.15)$$

substitusi persamaan (4.14) dan (4.15) ke persamaan (4.13), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{RC}-\bar{Y}) \approx \left[-\frac{E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(\bar{x}_{st}-\bar{X})}{\bar{X}}\right] + R\left[\frac{E(\bar{x}_{st}-\bar{X})^{2}}{\bar{X}}\right]$$

$$\approx \frac{1}{\bar{X}}\left[RE(\bar{x}_{st}-\bar{X})^{2} - E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(\bar{x}_{st}-\bar{X})\right] \qquad (4.16)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.16) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{RC}-\bar{Y}) = \frac{1}{\bar{X}}\left(RE(\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})^{2} - Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.17)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^{2}$$

maka persamaan (4.17) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{RC}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{\bar{X}}\left(RV(\bar{x}_{st}) - Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.18)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan persamaan (2.31) maka persamaan (4.18) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{RC}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{\bar{X}}\left[\left(R\omega_{h}{}^{2}\gamma_{h}S_{xh}{}^{2} - \sum_{h=1}^{k}\ \omega_{h}{}^{2}\gamma_{h}S_{yxh}\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{\bar{X}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_{h}{}^{2}\gamma_{h}\left(RS_{xh}{}^{2} - S_{yxh}\right)\right) \qquad (4.19)$$

berdasarkan persamaan (4.3) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{RC}) \approx \left[ \frac{1}{\bar{X}} \left( \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (R S_{xh}{}^2 - S_{yxh} \right) \right] \tag{4.20}$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{RC}) \approx \left( (\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st}) \frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{x}_{st}} \bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + (\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st}) \frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{y}_{st}} \bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} \right)^2 \tag{4.21}$$

selanjutnya persamaan diatas, dicari masing-masing turunannya, diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\partial \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X}}{\partial \bar{y}_{st}}$$

$$= \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} \tag{4.22}$$

dan

$$\frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{\partial \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X}}{\partial \bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u = \bar{y}_{st} \bar{X}$ , $v = \bar{x}_{st}$

turunan $\bar{y}_{RC} = \frac{u}{v}$ dengan $u = f(\bar{x}_{st})$ dan $v = g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{v \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} - u \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}}}{v^2}$$

dengan $\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga turunannya diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st})0 - (\bar{y}_{st} \bar{X})1}{(\bar{x}_{st})^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st} \bar{X})}{(\bar{x}_{st})^2}$$

$$\frac{\partial \bar{y}_{RC}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}^{\,2}}\,\bar{X} \tag{4.23}$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka persamaan (4.20) dan (4.21), diperoleh:

$$= \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}$$

$$= \frac{\bar{X}}{\bar{X}}$$

$$= 1 \tag{4.24}$$

dan

$$= \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}^{\,2}}\,\bar{X}$$

$$= -\frac{\overline{YX}}{\bar{X}^{2}} = -\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = -R_C \tag{4.25}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.24) dan persamaan (4.25) ke persamaan (4.21), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{RC}) \approx E\Big((\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R)^2 - 2E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R(\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st}) + (\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st})^2\Big) \tag{4.26}$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.26) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{RC}) \approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R)^2 - 2Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st})^2 \tag{4.27}$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.27) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{RC}) \approx V(\bar{x}_{st})R_C^{\,2} - 2R_C Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + V(\bar{y}_{st}) \tag{4.28}$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.28) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{RC}) = \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2}\gamma_h S_{xh}^{\,2} R_C^{\,2} - 2R_C \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2}\gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\,2}\gamma_h S_{yh}^{\,2}$$

$$= \sum_{h}^{k} \omega_h^{\,2}\gamma_h (S_{xh}^{\,2} R_C^{\,2} - 2R_C S_{yxh} + S_{yh}^{\,2})$$

dimisalkan $R_C = \varpi$, maka persamaan (4.28) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{RC}) = \sum_{h}^{k} \omega_h^{\,2}\gamma_h (S_{yh}^{\,2} + \varpi(S_{xh}^{\,2}\varpi - 2S_{yxh})) \tag{4.29}$$

karena $R_C = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$, maka:

$$\varpi = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

## 4.2 Bias dan *Mean Square Error* Penduga Rasio Singh dan Taylor

Penduga rasio Singh dan Taylor adalah:

$$\bar{y}_{ST} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st} + \rho}(\overline{X}_{st} + \rho)$$

Selanjutnya penduga rasio Singh dan Taylor dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\bar{y}_{ST} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{ST}} X_{ST} = \hat{R}_{ST} X_{ST}$$

dimisalkan $x_{ST} = \bar{x}_{st} + \rho$ dan $X_{ST} = \overline{X}_{st} + \rho$

maka $\hat{R}_{ST} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{ST}}$ (4.30)

berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio Singh dan Taylor diperoleh sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$= E(\hat{\theta} - \theta) \quad (4.31)$$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.30) maka persamaan (4.31) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{ST}) = E(\bar{y}_{ST} - \overline{Y}) \quad (4.32)$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.32) adalah sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{ST} - \overline{Y}) = E\left( \frac{\bar{y}_{st}}{x_{ST}} X_{ST} - X_{ST} \frac{\overline{Y}}{X_{ST}} \right)$$

karena $R_{ST} = \dfrac{\bar{Y}}{X_{ST}}$, maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) = X_{ST} E\left(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{STt}} - R_{ST}\right)$$

$$= X_{ST} E(\frac{1}{x_{ST}}(\bar{y}_{st} - x_{ST} R_{ST}) \qquad (4.33)$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.33) $\dfrac{1}{x_{ST}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{x_{ST}} = \frac{1}{X_{ST} + (x_{ST} - X_{ST})}$$

$$= \frac{1}{X_{ST}}(1 + \frac{X_{ST}}{(x_{ST} - X_{ST})})$$

$$= \frac{1}{X_{ST}}\left(1 + \frac{(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}}\right)^{-1} \qquad (4.34)$$

selanjutnya persamaan (4.34) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret Taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!}\theta + \frac{f''(\theta)}{2!}\theta^2 + .... \qquad (4.35)$$

dimisalkan:

$$\theta = \left(\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}}\right)$$

selanjutnya dengan mensubstitusikan $\theta$, persamaan (4.34) diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = (1+\theta)^{-1}$$

dengan turunannya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1+\theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1+\theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.35) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \tag{4.36}$$

substitusikan $\theta = \left(\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}}\right)$ kedalam persamaan (4.36), diperoleh:

$$\left(1 + (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}})\right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}}) + (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}})^2 - ... \tag{4.37}$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left(1 + (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}})\right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}}) \tag{4.38}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.38) ke persamaan (4.34) diperoleh:

$$\frac{1}{x_{ST}} = \frac{1}{X_{ST}}\left(1 - (\frac{x_{ST} - X_{ST}}{X_{ST}})\right) \tag{4.39}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.39) ke persamaan (4.33), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx X_{ST} E(\frac{1}{X_{ST}}\left(1 - \frac{(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}}\right)(\bar{y}_{st} - x_{ST} R_{ST})$$

$$\approx E\left(\bar{y}_{st} - x_{st} R_{ST} - \bar{y}_{st}\frac{(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}} + \frac{(x_{ST} - X_{ST}) x_{ST} R_{ST}}{X_{ST}}\right) \tag{4.40}$$

$$\approx \left(E(y_{st} - R_{ST} x_{ST}) - \bar{y}_{st}\frac{E(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}} + R_{ST}\frac{E\big(x_{ST}(x_{ST} - X_{ST})\big)}{X_{ST}}\right) \tag{4.41}$$

karena,

$$E(\bar{y}_{st} - R_{ST} x_{ST}) = E(\bar{y}_{st} - \frac{\bar{y}_{st}}{x_{ST}} x_{ST}) = 0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \left( -\frac{E(\bar{y}_{st}(x_{ST} - X_{ST}))}{X_{ST}} + R_{ST}\,\frac{E(x_{ST}(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}} \right) \qquad (4.42)$$

kemudian persamaan (4.42) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(\bar{y}_{st}(x_{ST} - X_{ST})\right) &= E(\bar{y}_{st}(x_{ST} - X_{ST}) \\ &= E(\bar{y}_{st}x_{ST} - \bar{y}_{st}X_{ST}) - E(\bar{Y}x_{ST} - \bar{Y}X_{ST}) \\ &= E\left((\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{ST} - X_{ST})\right) \qquad (4.43) \end{aligned}$$

ruas kanan diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(x_{ST}(x_{ST} - X_{ST})\right) &= E(x_{ST}x_{ST} - x_{ST}X_{ST}) \\ &= E(x_{ST}x_{ST} - x_{ST}X_{ST} - x_{ST}X_{ST} + x_{ST}X_{ST}) \\ &= E(x_{ST}{}^{2} - 2x_{ST}X_{ST} + X^{2}{}_{ST}) \\ &= E(x_{ST} - X_{ST})^2 \qquad (4.44) \end{aligned}$$

substitusi persamaan (4.43) dan (4.44) ke persamaan (4.42), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \left( -\frac{E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{ST} - X_{ST})}{X_{ST}} + R_{ST}\,\frac{E(x_{ST} - X_{ST})^2}{X_{ST}} \right)$$

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \left( R_{ST}\,\frac{E(x_{ST} - X_{ST})^2}{X_{ST}} - \frac{E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X})}{X_{ST}} \right)$$

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{ST}}\left(R_{ST}E(x_{ST} - X_{ST})^2 - E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X})\right) \qquad (4.45)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.45) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{ST}}\left(R_{ST}E(x_{ST} - X_{ST})^2 - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})\right) \qquad (4.46)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.46) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{ST}}\left(R_{ST}V(\bar{x}_{st}) - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})\right) \qquad (4.47)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan persamaan (2.31) maka persamaan (4.47) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{ST}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{ST}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h R_{ST}S_{xh}{}^2-\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h S_{yxh}\right)$$

$$\approx \frac{1}{X_{ST}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h\left(R_{ST}S_{xh}{}^2-S_{yxh}\right)\right) \tag{4.48}$$

berdasarkan persamaan (4.32) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{ST}) \approx \frac{1}{X_{ST}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h(R_{ST}S_{xh}{}^2-S_{yxh}) \tag{4.49}$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx E\left((\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})\left.\frac{\partial\bar{y}_{ST}}{\partial\bar{x}_{st}}\right|_{\bar{X},\bar{Y}}+(\bar{y}_{st}-\bar{Y}_{st})\left.\frac{\partial\bar{y}_{ST}}{\partial\bar{y}_{st}}\right|_{\bar{X},\bar{Y}}\right)^2 \tag{4.50}$$

berdasarkan persamaan (4.50), maka dicari masing-masing turunannya, diperoleh:

$$\frac{\partial\bar{y}_{ST}}{\partial\bar{y}_{st}}=\frac{\partial\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}+\rho}\bar{X}+\rho\right)}{\partial\bar{y}_{st}}$$

$$=\frac{\bar{X}+\rho}{\bar{x}_{st}+\rho} \tag{4.51}$$

dan,

$$\frac{\partial\bar{y}_{ST}}{\partial\bar{x}_{st}}=\frac{\partial\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}+\rho}\bar{X}+\rho\right)}{\partial\bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u=\bar{y}_{st}\bar{X}+\rho$, $v=\bar{x}_{st}+\rho$

turunan $\bar{y}_{ST}=\frac{u}{v}$ dengan $u=f(\bar{x}_{st})$ dan $v=g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial\bar{y}_{ST}}{\partial\bar{x}_{st}}=\frac{v\frac{\partial u}{\partial\bar{x}_{st}}-u\frac{\partial v}{\partial\bar{x}_{st}}}{v^2} \tag{4.52}$$

dengan $\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga persamaan (4.52) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{ST}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st} + \rho)0 - (\bar{y}_{st}\bar{X} + \rho)1}{(\bar{x}_{st} + \rho)^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st}\bar{X} + \rho)}{(\bar{x}_{st} + \rho)^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X} + \rho)}{(\bar{x}_{st} + \rho)^2} \qquad (4.53)$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka persamaan (4.52) dan (4.53), diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{ST}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X} + \rho}{\bar{x} + \rho}$$

$$= \frac{\bar{X} + \rho}{\bar{X} + \rho}$$

$$= 1 \qquad (4.54)$$

dan

$$\frac{\partial \bar{y}_{ST}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{Y}_{st}}{(\bar{X}_{st} + \rho)}$$

$$= -R_{ST} \qquad (4.55)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.54) dan persamaan (4.55) ke persamaan (4.50), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx E\left(-(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R_{ST} + (\bar{y}_{st} - \bar{Y})(1)\right)^2 \qquad (4.56)$$

$$\approx E\left((\bar{y}_{st} - \bar{Y})(1) - (\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R_{ST}\right)^2$$

$$\approx E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 - 2R_{ST}E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(\bar{x}_{st} - \bar{X}) + R_{ST}{}^2 E(\bar{x}_{st} - \bar{X})^2 \quad (4.57)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.57) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 - 2R_{ST}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + E(\bar{x}_{st} - \bar{X})^2 \qquad (4.58)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.58) diperoleh sebagai berikut

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx V(\bar{y}_{st}) - 2R_{ST}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + R_{ST}V(\bar{x}_{st}) \qquad (4.59)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.59) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h S_{yh}^{\ 2} - 2R_{ST} \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h S_{xh}^{\ 2} R_{ST} \qquad (4.60)$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h \left( S_{yh}^{\ 2} - 2R_{ST} S_{yxh} + S_{xh}^{\ 2} R_{ST} \right) \qquad (4.61)$$

dimisalkan $R_{ST} = \theta$, maka persamaan (4.61) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{ST}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2} \gamma_h \left( S_{yh}^{\ 2} + \theta(\theta S_{xh}^{\ 2} - 2S_{yxh}^{\ 2}) \right) \qquad (4.62)$$

karena , $R = \dfrac{\bar{Y}_{st}}{(\bar{X}_{st} + \rho)}$ maka:

$$\theta = -\frac{\bar{Y}_{st}}{(\bar{X}_{st} + \rho)}$$

### 4.3 Bias dan *Mean Square Error* Penduga Rasio Upadhayaya dan Singh

1. Penduga rasio Upadhayaya dan Singh yang menggunakan koefisien korelasi dan koefisien variansi dengan koefisien variansi sebagai pengali dari rata-rata sampel dan rata-rata populasi pada sampling acak berstrata adalah:

$$\bar{y}_{pr1} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}C_x + \rho}(\bar{X}C_x + \rho)$$

maka persamaan menjadi sebagai berikut:

$$\bar{y}_{pr1} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}} X_{pr1} = \hat{R}_{pr1} X_{pr1} \qquad (4.63)$$

dimisalkan $x_{pr1} = \bar{x}C_x + \rho$ dan $X_{pr1} = \bar{X}C_x + \rho$

maka $\hat{R}_{pr1} = \dfrac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}}$

berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio Upadhayaya dan Singh diperoleh sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$= E(\hat{\theta} - \theta) \tag{4.64}$$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.63) maka persamaan (4.64) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{pr1}) = E(\bar{y}_{pr1} - \bar{Y}) \tag{4.65}$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.65) adalah sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr1} - \bar{Y}) = E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}} X_{pr1} - \bar{Y})$$

$$= E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}} X_{pr1} - X_{pr1} \frac{\bar{Y}}{X_{pr1}})$$

$$= X_{pr1} E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}} - \frac{\bar{Y}}{X_{pr1}})$$

karena $R_{pr1} = \dfrac{\bar{Y}_{st}}{X_{pr1}}$, maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{ST} - \bar{Y}) = X_{pr1} E(\frac{1}{x_{pr1}} (\bar{y}_{st} - x_{pr1} R_{pr1}) \tag{4.66}$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.56) $\dfrac{1}{x_{pr1}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{x_{pr1}} = \frac{1}{X_{pr1} + (x_{pr1} - X_{pr1})}$$

$$= \frac{1}{X_{pr1}} (1 + \frac{X_{pr1}}{(x_{pr1} - X_{pr1})})$$

$$= \frac{1}{X_{pr1}} \left(1 + \frac{(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}}\right)^{-1} \tag{4.67}$$

persamaan (4.57) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret Taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!} \theta + \frac{f^{''}(\theta)}{2!} \theta^2 + .... \tag{4.68}$$

dimisalkan:

$$\theta = \left( \frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}} \right)$$

selanjutnya dengan mensubstitusikan $\theta$, persamaan (4.67) diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = (1+\theta)^{-1}$$

dengan turunaanya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1+\theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1+\theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.68) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \tag{4.69}$$

substitusikan $\theta = \left( \frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}} \right)$ kedalam persamaan (4.69), diperoleh:

$$\left( 1 + (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}}) \right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}}) + (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}})^2 - ... \tag{4.70}$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left( 1 + (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}}) \right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}}) \tag{4.71}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.71) ke persamaan (4.67) diperoleh:

$$\frac{1}{x_{pr1}} = \frac{1}{X_{pr1}} \left( 1 - (\frac{x_{pr1} - X_{pr1}}{X_{pr1}}) \right) \tag{4.72}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.72) ke persamaan (4.66), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr1} - \bar{Y}) \approx X_{pr1} E(\frac{1}{X_{pr1}}\left(1 - \frac{(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}}\right)(\bar{y}_{st} - x_{pr1} R_{pr1})$$

$$\approx E\left(\bar{y}_{st} - x_{pr1} R_{pr1} - \bar{y}_{st}\frac{(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}} + \frac{(x_{pr1} - X_{pr1}) x_{pr1} R_{pr1}}{X_{pr1}}\right)$$

$$\approx \left(E(y_{st} - R_{pr1} x_{pr1} -) - (\bar{y}_{st}\frac{E(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}}) + R_{pr1}\frac{E(x_{pr1}(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}}\right) \quad (4.73)$$

karena,

$$E(\bar{y}_{st} - R_{pr1} x_{pr1}) = E(\bar{y}_{st} - \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr1}} x_{pr1}) = 0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{pr1} - \bar{Y}) \approx \left(-\frac{E(\bar{y}_{st}(x_{pr1} - X_{pr1}))}{X_{pr1}} + R_{pr1}\frac{E(x_{pr1}(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}}\right) \quad (4.74)$$

selanjutnya persamaan (4.74) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(\bar{y}_{st}(x_{pr1} - X_{pr1})\right) &= E\left(\bar{y}_{st}(x_{pr1} - X_{pr1})\right) \\ &= E(\bar{y}_{st} x_{pr1} - \bar{y}_{st} X_{pr1}) - E(\bar{Y} x_{pr1} - \bar{Y} X_{pr1}) \\ &= E\left((\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr1} - X_{pr1})\right) \quad (4.75) \end{aligned}$$

ruas kanan diperoleh:

$$\begin{aligned} E\left(x_{pr1}(x_{pr1} - X_{pr1})\right) &= E(x_{pr1} x_{pr1} - x_{pr1} X_{pr1}) \\ &= E(x_{pr1} x_{pr1} - x_{pr1} X_{pr1} - x_{pr1} X_{pr1} + x_{pr1} X_{pr1}) \\ &= E(x_{pr1}{}^{2} - 2 x_{pr1} X_{pr1} + X^{2}{}_{pr1}) \\ &= E(x_{pr1} - X_{pr1})^{2} \quad (4.76) \end{aligned}$$

substitusi persamaan (4.75) dan (4.76) ke persamaan (4.74), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr1} - \bar{Y}) \approx \left(-\frac{E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr1} - X_{pr1})}{X_{pr1}} + R_{pr1}\frac{E(x_{pr1} - X_{pr1})^{2}}{X_{pr1}}\right)$$

$$E(\bar{y}_{pr1}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr1}}\left(R_{pr1}E(x_{pr1}-X_{pr1})^2 - E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(x_{pr1}-X_{pr1})\right) \qquad (4.77)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.77) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr1}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr1}}\left(R_{pr1}E(x_{pr1}-X_{pr1})^2 - Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.78)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.78) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr1}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr1}}\left(R_{pr1}V(\bar{x}_{st}) - Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.79)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan persamaan (2.31) maka persamaan (4.79) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr1}-\bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr1}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h^{\,2}\gamma_h R_{pr1}S_{xh}^{\,2} - \sum_{h=1}^{k}\omega_h^{\,2}\gamma_h S_{yxh}\right)$$

$$\approx \frac{1}{X_{pr1}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h^{\,2}\gamma_h (R_{pr1}S_{xh}^{\,2} - S_{yxh}) \qquad (4.80)$$

berdasarkan persamaan (4.65) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{pr1}) \approx \frac{1}{X_{pr1}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h^{\,2}\gamma_h (R_{pr1}S_{xh}^{\,2} - S_{yxh}) \qquad (4.81)$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx \left[\left((\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}}\right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + \left((\bar{y}_{st}-\bar{Y}_{st})\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{y}_{st}}\right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}}\right]^2 \qquad (4.82)$$

selanjutnya persamaan diatas, dicari masing-masing turunannya, diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}C_x+\rho}(\bar{X}C_x+\rho)\right)}{\partial \bar{y}_{st}}$$

$$= \frac{\bar{X}C_x+\rho}{\bar{x}C_x+\rho} \qquad (4.83)$$

dan,

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}C_x + \rho}(\bar{X}C_x + \rho)\right)}{\partial \bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u = \bar{y}_{st}(\bar{X}C_x + \rho)$, $v = \bar{x}_{st}C_x + \rho$

turunan $\bar{y}_{pr1} = \dfrac{u}{v}$ dengan $u = f(\bar{x}_{st})$ dan $v = g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} - u\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}}}{v^2} \tag{4.84}$$

dengan $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga persamaan (4.84) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st}C_x + \rho)0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}C_x + \rho))1}{(\bar{x}_{st}C_x + \rho)^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st}\bar{X}C_x + \rho)}{(\bar{x}_{st}C_x + \rho)^2}$$

$$= -\frac{(\bar{y}_{st}(\bar{X}C_x + \rho)}{(\bar{X}C_x + \rho)^2} \tag{4.85}$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka persamaan (4.83) dan (4.85), diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}C_x + \rho}{\bar{X}C_x + \rho}$$

$$= 1 \tag{4.86}$$

dan,

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}C_x + \rho)}{(\bar{x}C_x + \rho)^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}C_x + \rho)}{(\bar{X}C_x + \rho)^2}$$

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr1}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{Y}_{st}}{\bar{X}C_x + \rho} = -R_{pr1} \tag{4.87}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.86) dan persamaan (4.87) ke persamaan (4.82), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx E\left(-(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R_{pr1} + (\bar{y}_{st} - \bar{Y})(1)\right)^2 \tag{4.88}$$

$$\approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr1})^2 - 2R_{pr1}E(\bar{x}_{st} - \bar{X})(\bar{y}_{st} - \bar{Y}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \tag{4.89}$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.89) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr1})^2 - 2R_{pr1}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \tag{4.90}$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.90) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx V(\bar{x}_{st})R_{pr1}{}^2 - 2R_{pr1}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + V(\bar{y}_{st}) \tag{4.91}$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.91) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{xh}{}^2 R_{pr1} - 2R_{pr1} \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yh}{}^2 \tag{4.92}$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{xh}{}^2 R^2{}_{pr1} - 2R_{pr1} \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h \gamma_h S_{yh}{}^2$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr1}S_{yxh} + R_{pr1}{}^2 S_{xh}{}^2) \tag{4.93}$$

2. penduga rasio Upadhayaya dan Singh yang menggunakan koefisien korelasi dan koefisien variansi dengan koefisien korelasi sebagai pengali dari rata-rata sampel dan rata-rata populasi pada sampling acak berstrata adalah:

$$\bar{y}_{pr2} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + C_x}(\bar{X}_\rho + C_x)$$

selanjutnya penduga rasio Upadhayaya dan Singh disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\bar{y}_{pr2} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}} X_{pr2} = \hat{R}_{pr2} X_{pr2} \tag{4.94}$$

dimana $x_{pr2} = \bar{x}\rho + C_x$ dan $X_{pr2} = \bar{X}\rho + C_x$

maka $\hat{R}_{pr2} = \dfrac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}}$

berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio Upadhayaya dan Singh diperoleh sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$= E(\hat{\theta} - \theta) \quad (4.95)$$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.94) maka persamaan (4.95) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{pr2}) = E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) \quad (4.96)$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.96) adalah sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) = E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}} X_{pr2} - \bar{Y})$$

$$= E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}} X_{pr2} - X_{pr2} \frac{\bar{Y}}{X_{pr2}})$$

$$= X_{pr2} E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}} - \frac{\bar{Y}}{X_{pr2}})$$

karena $R_{pr2} = \dfrac{\bar{Y}}{X_{pr2}}$, maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y} = X_{pr2} E(\frac{1}{x_{pr2}}(\bar{y}_{st} - x_{pr2} R_{pr2}) \quad (4.97)$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.56) $\dfrac{1}{x_{pr2}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{x_{pr2}} = \frac{1}{X_{pr2} + (x_{pr2} - X_{pr2})}$$

$$= \frac{1}{X_{pr2}}(1 + \frac{X_{pr2}}{(x_{pr2} - X_{pr2})})$$

$$\frac{1}{x_{pr2}} = \frac{1}{X_{pr2}}\left(1+\frac{(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}}\right)^{-1} \tag{4.98}$$

persamaan (4.98) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret Taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!}\theta + \frac{f''(\theta)}{2!}\theta^2 + .... \tag{4.99}$$

dimisalkan:

$$\theta = \left(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}}\right)$$

sehingga persamaan (4.98) diperoleh:

$$f(\theta) = (1+\theta)^{-1}$$

dengan turunaanya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1+\theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1+\theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.82) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \tag{4.100}$$

substitusikan $\theta = \left(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}}\right)$ kedalam persamaan (4.100), diperoleh:

$$\left(1+(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}})\right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}}) + (\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}})^2 - ... \tag{4.101}$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left(1+(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}})\right)^{-1}=1-(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}}) \qquad (4.102)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.102) ke persamaan (4.98) diperoleh:

$$\frac{1}{x_{pr2}}=\frac{1}{X_{pr2}}\left(1-(\frac{x_{pr2}-X_{pr2}}{X_{pr2}})\right) \qquad (4.103)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.103) ke persamaan (4.97), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr2}-\bar{Y})\approx X_{pr2}E(\frac{1}{X_{pr2}}\left(1-\frac{(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}}\right)(\bar{y}_{st}-x_{pr2}R_{pr2}) \qquad (4.104)$$

$$\approx E\left(\bar{y}_{st}-x_{pr2}R_{pr2}-\bar{y}_{st}\frac{(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}}+\frac{(x_{pr2}-X_{pr2})x_{pr2}R_{pr2}}{X_{pr2}}\right)$$

$$\approx E\left((y_{st}-R_{pr2}x_{pr2})-E(\bar{y}_{st}\frac{(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}})+R_{pr2}E\frac{(x_{pr2}(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}}\right) \qquad (4.105)$$

karena,

$$E(\bar{y}_{st}-R_{pr2}x_{pr2})=E(\bar{y}_{st}-\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr2}}x_{pr2})=0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{pr2}-\bar{Y})\approx\left(-\frac{E\left(\bar{y}_{st}(x_{pr2}-X_{pr2})\right)}{X_{pr2}}+R_{pr2}\frac{E(x_{pr2}(x_{pr2}-X_{pr2})}{X_{pr2}}\right) \qquad (4.106)$$

selanjutnya persamaan (4.106) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$E\left(\bar{y}_{st}(x_{pr2}-X_{pr2})\right)=E(\bar{y}_{st}x_{pr2}-\bar{y}_{pr2}X_{pr2})$$

$$=E(\bar{y}_{st}x_{pr2}-\bar{y}_{st}X_{pr2})-E(\bar{Y}x_{pr2}-\bar{Y}X_{pr2})$$

$$=E\left((\bar{y}_{st}-\bar{Y})(x_{pr2}-X_{pr2})\right) \qquad (4.107)$$

ruas kanan diperoleh:

$$E\left(x_{pr2}(x_{pr2}-X_{pr2})\right)=E(x_{pr2}x_{pr2}-x_{pr2}X_{pr2})$$

$$=E(x_{pr2}x_{pr2}-x_{pr2}X_{pr2}-x_{pr2}X_{pr2}+x_{pr2}X_{pr2})$$

$$E\left(x_{pr2}(x_{pr2}-X_{pr2})\right) \quad = E(x_{pr2}{}^2 - 2x_{pr2}X_{pr2} + X^2{}_{pr2})$$

$$= E(x_{pr2} - X_{pr2})^2 \qquad (4.108)$$

substitusi persamaan (4.107) dan (4.108) ke persamaan (4.106), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) \approx \left( -\frac{E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr2} - X_{pr2})}{X_{pr2}} + R_{pr2}\frac{E(x_{pr2} - X_{pr2})^2}{X_{pr2}} \right) \qquad (4.109)$$

$$\approx \frac{1}{X_{pr2}}\left(R_{pr2}E(x_{pr2} - X_{pr2})^2 - E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr2} - X_{pr2})\right) \qquad (4.110)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.101) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr2}}\left(R_{pr2}E(x_{pr2} - X_{pr2})^2 - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})\right) \qquad (4.111)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.111) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr2}}\left(R_{pr2}V(\bar{x}_{st}) - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})\right) \qquad (4.112)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan persamaan (2.31) maka persamaan (4.112) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr2} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr2}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h S_{xh}{}^2 R_{pr2} - \sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h S_{yxh}\right)$$

$$\approx \frac{1}{X_{pr2}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h(R_{pr2}S_{xh}{}^2 - S_{yxh}) \qquad (4.113)$$

berdasarkan persamaan (4.96) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{pr2}) \approx \frac{1}{X_{pr2}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h(R_{pr2}S_{xh}{}^2 - S_{yxh}) \qquad (4.114)$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx \left[ \left( (\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{x}_{st}} \right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + \left( (\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st})\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{y}_{st}} \right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} \right]^2 \qquad (4.115)$$

kemudian persamaan (4.115), dicari masing-masing turunannya, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\rho + C_x}(\bar{X}\rho + C_x)\right)}{\partial \bar{y}_{st}}$$

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}\rho + C_x}{\bar{x}\rho + C_x} \tag{4.116}$$

dan,

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\rho + C_x}(\bar{X}\rho + C_x)\right)}{\partial \bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u = \bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x)$, $v = \bar{x}\rho + C_x$

turunan $\bar{y}_{pr2} = \dfrac{u}{v}$ dengan $u = f(\bar{x}_{st})$ dan $v = g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} - u\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}}}{v^2} \tag{4.117}$$

dengan $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga persamaan (4.117) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st}\rho + C_x)0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x))1}{(\bar{x}\rho + C_x)^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x))}{(\bar{x}\rho + C_x)^2}$$

$$= -\frac{(\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x)}{(\bar{x}\rho + C_x)^2} \tag{4.118}$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka diperoleh persamaan (4.116) dan (4.118), sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}\rho + C_x}{\bar{x}\rho + C_x}$$

$$= \frac{\bar{X}\rho + C_x}{\bar{X}\rho + C_x}$$

$$= 1 \tag{4.119}$$

dan

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr2}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x)}{(\bar{x}\rho + C_x)^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + C_x)}{(\bar{X}\rho + C_x)^2}$$

$$= -\frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + C_x} = -R_{pr2} \tag{4.120}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.119) dan persamaan (4.120) ke persamaan (4.115), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx E\left(-(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R_{pr2} + (\bar{y}_{st} - \bar{Y})(1)\right)^2 \tag{4.121}$$

$$\approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr2})^2 - 2R_{pr2}E(\bar{x}_{st} - \bar{X})(\bar{y}_{st} - \bar{Y}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \tag{4.122}$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.122) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr2})^2 - 2R_{pr2}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \tag{4.123}$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.123) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx V(\bar{x}_{st})R^2{}_{pr2} - 2R_{pr2}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + V(\bar{y}_{st}) \tag{4.124}$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.124) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{xh}{}^2 R^2{}_{pr2} - 2R_{pr2} \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h \gamma_h S_{yh}{}^2$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr2} S_{yxh} + R_{pr2}{}^2 S_{xh}{}^2) \tag{4.125}$$

3. Penduga rasio Upadhayaya dan Singh yang menggunakan koefisien kurtosis dan koefisien korelasi dengan koefisien kurtosis sebagai pengali dari rata-rata sampel dan rata-rata populasi pada sampling acak berstrata adalah:

$$\bar{y}_{pr3} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho)$$

selanjutnya penduga rasio Upadhayaya dan Singh disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\bar{y}_{pr3} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr3}} X_{pr3} = \hat{R}_{pr3} X_{pr3} \tag{4.126}$$

dimana $x_{pr3} = \bar{x}\beta_2(x) + \rho$ dan $X_{pr3} = \bar{X}\beta_2(x) + \rho$

maka $\hat{R}_{pr3} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr3}}$

berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio Upadhayaya dan Singh diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta}) - \theta \\ &= E(\hat{\theta} - \theta) \end{aligned} \tag{4.127}$$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.126) maka persamaan (4.127) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{pr3}) = E(\bar{y}_{pr3} - \bar{Y}) \tag{4.128}$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.79) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_{pr3} - \bar{Y}) &= E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr3}} X_{pr3} - \bar{Y}) \\ &= E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr3}} X_{pr3} - X_{pr3} \frac{\bar{Y}}{X_{pr3}}) \end{aligned}$$

karena $R_{pr3} = \frac{\bar{Y}}{X_{pr3}}$, maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr3} - \bar{Y}) = X_{pr3} E(\frac{1}{x_{pr3}}(\bar{y}_{st} - x_{pr3} R_{pr3}) \tag{4.129}$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.129) $\frac{1}{\bar{x}_{pr3}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{x_{pr3}} = \frac{1}{X_{pr3} + (x_{pr3} - X_{pr3})}$$

$$= \frac{1}{X_{pr3}}(1 + \frac{X_{pr3}}{(x_{pr3} - X_{p3})})$$

$$= \frac{1}{X_{pr3}}\left(1 + \frac{(x_{pr3} - X_{pr3})}{X_{pr3}}\right)^{-1} \qquad (4.130)$$

persamaan (4.130) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret Taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!}\theta + \frac{f''(\theta)}{2!}\theta^2 + .... \qquad (4.131)$$

dimisalkan:

$$\theta = \left(\frac{x_{pr3} - X_{pr3}}{X_{pr3}}\right)$$

berdasarkan persamaan (4.130) diperoleh:

$$f(\theta) = (1+\theta)^{-1}$$

dengan turunaanya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1+\theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1+\theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = 2$$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.131) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \qquad (4.132)$$

substitusikan $\theta = \left(\frac{x_{pr3} - X_{pr3}}{X_{pr3}}\right)$ kedalam persamaan (4.132), diperoleh:

$$\left(1+(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}})\right)^{-1}=1-(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}})+(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}})^{2}-... \qquad (4.133)$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left(1+(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}})\right)^{-1}=1-(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}}) \qquad (4.134)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.134) ke persamaan (4.130) diperoleh:

$$\frac{1}{x_{pr3}}=\frac{1}{X_{pr3}}\left(1-(\frac{x_{pr3}-X_{pr3}}{X_{pr3}})\right) \qquad (4.135)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.135) ke persamaan (4.129), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx X_{pr3}E(\frac{1}{X_{pr3}}\left(1-\frac{(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}}\right)(\bar{y}_{st}-x_{pr3}R_{pr3}) \qquad (4.136)$$

$$\approx E\left(\bar{y}_{st}-x_{pr3}R_{pr3}-\bar{y}_{st}\frac{(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}}+\frac{(x_{pr3}-X_{pr3})x_{pr3}R_{pr3}}{X_{pr3}}\right)$$

$$\approx E\left((y_{st}-R_{pr3}x_{pr3})-\frac{E\bar{y}_{st}(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}})+R_{pr3}\frac{E(x_{pr3}(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}}\right) \qquad (4.137)$$

karena:

$$E(\bar{y}_{st}-R_{pr3}x_{pr3})=E(\bar{y}_{st}-\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr3}}x_{pr3})=0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx\left(-\frac{E(\bar{y}_{st}(x_{pr3}-X_{pr3}))}{X_{pr3}}+R_{pr3}\frac{E(x_{pr3}(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}}\right) \qquad (4.138)$$

selanjutnya persamaan (4.138) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$E\left(\bar{y}_{st}(x_{pr3}-X_{pr3})\right)=E(\bar{y}_{st}x_{pr3}-\bar{y}_{pr3}X_{pr3})$$

$$=E(\bar{y}_{st}x_{pr3}-\bar{y}_{st}X_{pr3})-E(\bar{Y}x_{pr3}-\bar{Y}X_{pr3})$$

$$=E\left((\bar{y}_{st}-\bar{Y})(x_{pr3}-X_{pr3})\right) \qquad (4.139)$$

ruas kanan diperoleh:

$$E\left(x_{pr3}(x_{pr3}-X_{pr3})\right)=E(x_{pr3}x_{pr3}-x_{pr3}X_{pr3})$$

$$E\left(x_{pr3}(x_{pr3}-X_{pr3})\right)=E(x_{pr3}x_{pr3}-x_{pr3}X_{pr3}-x_{pr3}X_{pr3}+x_{pr3}X_{pr3})$$

$$=E(x_{pr3}{}^{2}-2x_{pr3}X_{pr3}+X^{2}{}_{pr3})$$

$$=E(x_{pr3}-X_{pr3})^{2} \qquad (4.140)$$

substitusi persamaan (4.139) dan (4.140) ke persamaan (4.138), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx\left(-\frac{E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(x_{pr3}-X_{pr3})}{X_{pr3}}+R_{pr3}\frac{E(x_{pr3}-X_{pr3})^{2}}{X_{pr3}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{X_{pr3}}\left(R_{pr3}E(x_{pr3}-X_{pr3})^{2}-E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(x_{pr3}-X_{pr3})\right) \qquad (4.141)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.141) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx\frac{1}{X_{pr3}}\left(R_{pr3}E(x_{pr3}-X_{pr3})^{2}-Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.142)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st})=E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^{2}$$

maka persamaan (4.142) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx\frac{1}{X_{pr3}}\left(R_{pr3}V(\bar{x}_{st})-Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st})\right) \qquad (4.143)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.143) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr3}-\bar{Y})\approx\frac{1}{X_{pr3}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^{2}\gamma_h R_{pr3}S_{xh}{}^{2}-\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^{2}\gamma_h S_{yxh}\right)$$

$$\approx\frac{1}{X_{pr3}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^{2}\gamma_h(R_{pr3}S_{xh}{}^{2}-S_{yxh}) \qquad (4.144)$$

berdasarkan persamaan (4.128) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{pr3})\approx\frac{1}{X_{pr3}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^{2}\gamma_h(R_{pr3}S_{xh}{}^{2}-S_{yxh}) \qquad (4.145)$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx \left[ \left( (\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st}) \frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{x}_{st}} \right) \Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + \left( (\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st}) \frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{y}_{st}} \right) \Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} \right]^2 \qquad (4.146)$$

selanjutnya persamaan diatas, maka dicari masing-masing turunannya, diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\partial \left( \dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho} (\bar{X}\beta_2(x) + \rho) \right)}{\partial \bar{y}_{st}}$$

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}\beta_2(x) + \rho}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho} \qquad (4.147)$$

dan,

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{\partial \left( \dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\beta_2(x) + \rho} (\bar{X}\beta_2(x) + \rho) \right)}{\partial \bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u = \bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho)$, $v = \bar{x}\beta_2(x) + \rho$

turunan $\bar{y}_{pr3} = \dfrac{u}{v}$ dengan $u = f(\bar{x}_{st})$ dan $v = g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{v \dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} - u \dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}}}{v^2} \qquad (4.148)$$

dengan $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga persamaan (4.148) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st}\beta_2(x) + \rho)0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho))1}{(\bar{x}\beta_2(x) + \rho)^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho))}{(\bar{x}\beta_2(x) + \rho)^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x) + \rho)}{(\bar{x}\beta_2(x) + \rho)^2} \qquad (4.149)$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka diperoleh persamaan (4.147) dan persamaan (4.149) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}{\bar{x}\beta_2(x)+\rho}$$

$$= \frac{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}{\bar{X}\beta_2(x)+\rho}$$

$$=1 \qquad (4.150)$$

berdasarkan persamaan (4.123), diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr3}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x)+\rho)}{(\bar{x}\beta_2(x)+\rho)^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\beta_2(x)+\rho)}{(\bar{X}\beta_2(x)+\rho)^2}$$

$$= -\frac{\bar{Y}}{(\bar{X}\beta_2(x)+\rho)}$$

$$= -R_{pr3} \qquad (4.151)$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.150) dan persamaan (4.151) ke persamaan (4.146), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx E\left(-(\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})R_{pr3}+(\bar{y}_{st}-\bar{Y})(1)\right)^2$$

$$\approx E(\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})^2(-R_{pr3})^2 - 2R_{pr3}E(\bar{x}_{st}-\bar{X})(\bar{y}_{st}-\bar{Y}) + E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^2 \quad (4.152)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.152) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\vec{y}_{pr3}) \approx E(\bar{x}_{st}-\bar{X}_{st})^2(-R_{pr3})^2 - 2R_{pr3}Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}) + E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^2 \ (4.153)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.153) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx V(\bar{x}_{st})R_{pr3}{}^2 - 2R_{pr3}Cov(\bar{x}_{st},\bar{y}_{st}) + V(\bar{y}_{st}) \qquad (4.154)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.154) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{xh}{}^2 R_{pr3}{}^2 - 2R_{pr3} \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h \gamma_h S_{yh}{}^2$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr3} S_{yxh} + R_{pr3}{}^2 S_{xh}{}^2)$$

4. Penduga rasio Upadhayaya dan Singh yang menggunakan koefisien kurtosis, koefisien korelasi dengan koefisien korelasi sebagai pengali dari rata-rata sampel dan rata-rata populasi pada sampling acak berstrata adalah:

$$\bar{y}_{pr4} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)} (\bar{X}\rho + \beta_2(x))$$

selanjutnya penduga rasio Upadhayaya dan Singh disederhanakan sebagai berikut:

$$\bar{y}_{pr4} = \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}} X_{pr4} = \hat{R}_{pr4} X_{pr4} \tag{4.156}$$

dimisalkan $x_{pr4} = \bar{x}\rho + \beta_2(x)$ dan $X_{pr4} = \bar{X}\rho + \beta_2(x)$

maka $\hat{R}_{pr4} = \dfrac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}}$

berdasarkan persamaan (2.5) bias penduga rasio Upadhayaya dan Singh diperoleh sebagai berikut:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$= E(\hat{\theta} - \theta) \tag{4.157}$$

berdasarkan persamaan (2.29) untuk persamaan (4.128) maka persamaan (4.129) diperoleh:

$$B(\bar{y}_{pr4}) = E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \tag{4.158}$$

sehingga ekspektasi dari persamaan (4.158) adalah sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) = E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}} X_{pr4} - \bar{Y})$$

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \quad = E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}} X_{pr4} - X_{pr4} \frac{\bar{Y}}{X_{pr4}})$$

$$= X_{pr4} E(\frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}} - \frac{\bar{Y}}{X_{pr4}})$$

karena $R_{pr4} = \frac{\bar{Y}}{X_{pr4}}$, maka diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) = X_{pr4} E(\frac{1}{x_{pr4}} (\bar{y}_{st} - x_{pr4} R_{pr4}) \qquad (4.159)$$

kemudian untuk mendapatkan nilai pendekatan sampel terhadap populasi, maka persamaan (4.159) $\frac{1}{x_{pr4}}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{1}{x_{pr4}} = \frac{1}{X_{pr4} + (x_{pr4} - X_{pr4})}$$

$$= \frac{1}{X_{pr4}} (1 + \frac{X_{pr4}}{(x_{pr4} - X_{pr4})})$$

$$= \frac{1}{X_{pr4}} \left( 1 + \frac{(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}} \right)^{-1} \qquad (4.160)$$

persamaan (4.160) dapat disederhanakan dengan menggunakan deret Taylor yaitu persamaannya diperoleh sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(\theta) + \frac{f^{'}(\theta)}{1!} \theta + \frac{f''(\theta)}{2!} \theta^2 + .... \qquad (4.161)$$

dimisalkan:

$$\theta = \left( \frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}} \right)$$

sehingga persamaan (4.160) diperoleh:

$$f(\theta) = (1 + \theta)^{-1}$$

dengan turunaanya sebagai berikut:

$$f'(\theta) = -1(1 + \theta)^{-2}$$

$$f''(\theta) = 2(1 + \theta)^{-3}$$

dan untuk $\theta = 0$ diperoleh:

$f(0) = 1$

$f'(0) = -1$

$f''(0) = 2$

jika $\theta$ sama dengan nol pada persamaan (4.161) maka diperoleh pendekatan deret Maclaurin, dimana persamaannya adalah sebagai berikut:

$$f(\theta) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\theta + \frac{f''(0)}{2!}\theta^2 + ....$$

$$(1+\theta)^{-1} = 1 - \theta + \theta^2 - ... \tag{4.162}$$

substitusikan $\theta = \left( \dfrac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}} \right)$ kedalam persamaan (4.162), diperoleh:

$$\left(1 + (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}})\right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}}) + (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}})^2 \tag{4.163}$$

selanjutnya diambil persamaan sampai orde pertama :

$$\left(1 + (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}})\right)^{-1} = 1 - (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}}) \tag{4.164}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.164) ke persamaan (4.160) diperoleh:

$$\frac{1}{x_{pr4}} = \frac{1}{X_{pr4}}\left(1 - (\frac{x_{pr4} - X_{pr4}}{X_{pr4}})\right) \tag{4.165}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.165) ke persamaan (4.159), diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \approx X_{pr4} E(\frac{1}{X_{pr4}}\left(1 - \frac{(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}}\right)(\bar{y}_{st} - x_{pr4}R_{pr4}) \tag{4.166}$$

$$\approx E\left(\bar{y}_{st} - x_{pr4}R_{pr4} - \bar{y}_{st}\frac{(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}} + \frac{(x_{pr4} - X_{pr4})x_{pr4}R_{pr4}}{X_{pr4}}\right)$$

$$\approx \left(E(y_{st} - R_{pr4}x_{pr4}) - \frac{\bar{y}_{st}E(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}}) + R_{pr4}\frac{E(x_{pr4}(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}}\right) \tag{4.167}$$

karena,

$$E(\bar{y}_{st} - R_{pr4} x_{pr4}) = E(\bar{y}_{st} - \frac{\bar{y}_{st}}{x_{pr4}} x_{pr4}) = 0$$

maka:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \approx \left( -\frac{E\big(\bar{y}_{st}(x_{pr4} - X_{pr4})\big)}{X_{pr4}} + R_{pr4} \frac{E\big(x_{pr4}(x_{pr4} - X_{pr4})\big)}{X_{pr4}} \right) \quad (4.168)$$

kemudian persamaan (4.168) dijabarkan masing-masing ruas, sebagai berikut:

ruas kiri diperoleh:

$$\begin{aligned} E\big(\bar{y}_{st}(x_{pr4} - X_{pr4})\big) &= E(\bar{y}_{st} x_{pr4} - \bar{y}_{pr4} X_{pr4}) \\ &= E(\bar{y}_{st} x_{pr4} - \bar{y}_{st} X_{pr4}) - E(\bar{Y} x_{pr4} - \bar{Y} X_{pr4}) \\ &= E\big((\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr4} - X_{pr4})\big) \end{aligned} \quad (4.169)$$

ruas kanan diperoleh:

$$\begin{aligned} E\big(x_{pr4}(x_{pr4} - X_{pr4})\big) &= E(x_{pr4} x_{pr4} - x_{pr4} X_{pr4}) \\ &= E(x_{pr4} x_{pr4} - x_{pr4} X_{pr4} - x_{pr4} X_{pr4} + x_{pr4} X_{pr4}) \\ &= E({x_{pr4}}^2 - 2 x_{pr4} X_{pr4} + X^2{}_{pr4}) \\ &= E(x_{pr4} - X_{pr4})^2 \end{aligned} \quad (4.170)$$

substitusi persamaan (4.169) dan (4.170) ke persamaan (4.168), diperoleh:

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) &\approx \left( -\frac{E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{pr4} - X_{pr4})}{X_{pr4}} + R_{pr4} \frac{E(x_{pr4} - X_{pr4})^2}{X_{pr4}} \right) \\ &\approx \frac{1}{X_{pr4}} \big( R_{pr4} E(x_{pr4} - X_{pr4})^2 - E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})(x_{p4} - X_{pr4}) \big) \end{aligned} \quad (4.171)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.171) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr4}} \big( R_{pr4} E(x_{pr4} - X_{pr4})^2 - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) \big) \quad (4.172)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.172) diperoleh sebagai berikut:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr4}}\left(R_{pr4}V(\bar{x}_{st}) - Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st})\right) \tag{4.173}$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.173) diperoleh:

$$E(\bar{y}_{pr4} - \bar{Y}) \approx \frac{1}{X_{pr4}}\left(\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h R_{pr4}S_{xh}{}^2 - \sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h S_{yxh}\right)$$

$$\approx \frac{1}{X_{pr4}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h(R_{pr4}S_{xh}{}^2 - S_{yxh}) \tag{4.174}$$

berdasarkan persamaan (4.158) diperoleh bias, sebagai berikut:

$$B(\bar{y}_{pr4}) \approx \frac{1}{X_{pr4}}\sum_{h=1}^{k}\omega_h{}^2\gamma_h(R_{pr4}S_{xh}{}^2 - S_{yxh}) \tag{4.175}$$

Berdasarkan persamaan (2.41) diperoleh MSE nya sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx \left[\left((\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})\frac{\partial\bar{y}_{pr4}}{\partial\bar{x}_{st}}\right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}} + \left((\bar{y}_{st} - \bar{Y}_{st})\frac{\partial\bar{y}_{pr4}}{\partial\bar{y}_{st}}\right)\Bigg|_{\bar{X},\bar{Y}}\right]^2 \tag{4.176}$$

selanjutnya persamaan (4.176), dicari masing-masing turunannya, diperoleh:

$$\frac{\partial\bar{y}_{pr4}}{\partial\bar{y}_{st}} = \frac{\partial\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)}(\bar{X}\rho + \beta_2(x)\right)}{\partial\bar{y}_{st}}$$

$$= \frac{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)} \tag{4.177}$$

dan,

$$\frac{\partial\bar{y}_{pr4}}{\partial\bar{x}_{st}} = \frac{\partial\left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)}(\bar{X}\rho + \beta_2(x))\right)}{\partial\bar{x}_{st}}$$

dimisalkan $u = \bar{y}_{st}\left(\bar{X}\rho + \beta_2(x)\right)$, $v = \bar{x}\rho + \beta_2(x)$

turunan $\bar{y}_{pr4} = \dfrac{u}{v}$ dengan $u = f(\bar{x}_{st})$ dan $v = g(\bar{x}_{st})$, maka turunannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr4}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} - u\dfrac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}}}{v^2} \tag{4.178}$$

dengan $\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_{st}} = 0$ dan $\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_{st}} = 1$, sehingga persamaan (4.148) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr4}}{\partial \bar{x}_{st}} = \frac{(\bar{x}_{st}\rho + \beta_2(x))0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + \beta_2(x)))1}{(\bar{x}\rho + \beta_2(x))^2}$$

$$= \frac{0 - (\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + \beta_2(x)))}{(\bar{x}\rho + \beta_2(x))^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + \beta_2(x))}{(\bar{x}\rho + \beta_2(x))^2} \tag{4.179}$$

berdasarkan persamaan (2.28), maka persamaan (4.177) dan (4.179), diperoleh:

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr4}}{\partial \bar{y}_{st}} = \frac{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}{\bar{x}\rho + \beta_2(x)}$$

$$= \frac{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}$$

$$= 1 \tag{4.180}$$

dan

$$\frac{\partial \bar{y}_{pr4}}{\partial \bar{x}_{st}} = -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + \beta_2(x))}{(\bar{x}\rho + \beta_2(x))^2}$$

$$= -\frac{\bar{y}_{st}(\bar{X}\rho + \beta_2(x))}{(\bar{X}\rho + \beta_2(x))^2}$$

$$= -\frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}$$

$$= -R_{pr4} \tag{4.181}$$

selanjutnya substitusikan persamaan (4.180) dan persamaan (4.181) ke persamaan (4.176), diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx E\left(-(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})R_{pr4} + (\bar{y}_{st} - \bar{Y})(1)\right)^2 \quad (4.182)$$

$$\approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr4})^2 - 2R_{pr4}E(\bar{x}_{st} - \bar{X})(\bar{y}_{st} - \bar{Y}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \quad (4.183)$$

berdasarkan persamaan (2.30) maka persamaan (4.183) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx E(\bar{x}_{st} - \bar{X}_{st})^2(-R_{pr4})^2 - 2R_{pr4}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2 \quad (4.184)$$

karena,

$$V(\bar{y}_{st}) = E(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2$$

maka persamaan (4.184) diperoleh sebagai berikut:

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx V(\bar{x}_{st})R^2{}_{pr4} - 2R_{pr4}Cov(\bar{x}_{st}, \bar{y}_{st}) + V(\bar{y}_{st}) \quad (4.185)$$

berdasarkan persamaan (2.32) dan (2.31) maka persamaan (4.185) diperoleh:

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{xh}{}^2 R^2{}_{pr4} - 2R_{pr4} \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{k} \omega_h \gamma_h S_{yh}{}^2$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr4}S_{yxh} + R_{pr4}{}^2 S_{xh}{}^2) \quad (4.186)$$

Selanjutnya untuk menentukan MSE pada Uphadayaya dan Singh secara keseluruhan adalah:

1. $MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr1}S_{yxh} + R_{pr1}{}^2 S_{xh}{}^2)$ (4.187)

dimisalkan $\lambda_1 = R_{pr1}$, maka persamaan (4.187) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{pr1}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2\lambda_1 S_{yxh} + \lambda_1{}^2 S_{xh}{}^2)$$

karena , $R_{pr4} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}C_x + \rho}$ maka:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}C_x + \rho}$$

2. $MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr2} S_{yxh} + R_{pr1}{}^2 S_{xh}{}^2)$ (4.188)

dimisalkan $\lambda_2 = R_{pr2}$, maka persamaan (4.188) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{pr2}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2\lambda_2 S_{yxh} + \lambda_2{}^2 S_{xh}{}^2)$$

karena , $R_{pr2} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + C_x}$, maka

$$\lambda_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + C_x},$$

3. $MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr3} S_{yxh} + R_{pr3}{}^2 S_{xh}{}^2)$ (4.189)

dimisalkan $\lambda_3 = R_{pr3}$, maka persamaan (4.189) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{pr3}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2\lambda_3 S_{yxh} + \lambda_3{}^2 S_{xh}{}^2)$$

karena , $R_{pr3} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}\beta_2(x) + \rho}$, maka

$$\lambda_3 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\beta_2(x) + \rho},$$

4. $MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pr4} S_{yxh} + R_{pr4}{}^2 S_{xh}{}^2)$ (4.190)

dimisalkan $\lambda_4 = R_{pr4}$, maka persamaan (4.190) diperoleh sebagai berikut :

$$MSE(\bar{y}_{pr4}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2\lambda_4 S_{yxh} + \lambda_4{}^2 S_{xh}{}^2)$$

karena , $R_{pr4} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}$, maka

$$\lambda_4 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)},$$

Sehingga $MSE(\bar{y}_{pri})$ adalah:

$$MSE(\bar{y}_{pri}) \approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2R_{pri} S_{yxh} + R_{pri}{}^2 S_{xh}{}^2)$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 - 2\lambda_i S_{yxh} + \lambda_i{}^2 S_{xh}{}^2)$$

$$\approx \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}))$$

dengan $\lambda_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}C_x + \rho}$, $\lambda_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + C_x}$, $\lambda_3 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\beta_2(x) + \rho}$, $\lambda_4 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}\rho + \beta_2(x)}$,

## 4.4 Perbandingan *Mean Square Error*

1. $MSE(\bar{y}_{pri}) < V(\bar{y}_{st})$, $\quad i = 1,2,3,4,..$

dimana, $V(\bar{y}_{st}) = \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_h{}^2$

$$\sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}) < \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h S_{yh}{}^2$$

$$\lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}) < 0$$

1.1 $\lambda_i S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh})$ jika $\lambda_i > 0$

1.2. $\lambda_i S_{xh}{}^2 > 2S_{yxh})$ jika $\lambda_i < 0$

jika salah satu dari persamaan 1.1 dan 1.2 terpenuhi, maka penduga rasio Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada rata-rata variasi.

2. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{RC})$,

$$\sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh})) < \sum_{h}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \varpi(\varpi S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}))$$

$$\lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}) < \varpi(\varpi S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh})$$

$$\lambda_i{}^2 S_{xh}{}^2 - 2\lambda_i S_{yxh} < \varpi^2 S_{xh}{}^2 - 2\varpi S_{yxh}$$

$$\lambda_i{}^2 S_{xh}{}^2 - \varpi^2 S_{xh}{}^2 < 2\lambda_i S_{yxh} - 2\omega S_{yxh}$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i^{\ 2} - \varpi^2) < 2S_{yxh}(\lambda_i - \varpi)$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i + \varpi)(\lambda_i - \varpi) < 2S_{yxh}(\lambda_i - \varpi)$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i + \varpi) < 2S_{yxh}$$

2.1 $(\lambda_i + \varpi)S_{xh}^{\ 2} < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \varpi$

2.2 $(\lambda_i + \varpi)S_{xh}^{\ 2} > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \varpi$

jika salah persamaan 2.1 dan 2.2 terpenuhi, maka penduga rasio Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio gabungan. Dan jika sebaliknya maka penduga rasio gabungan lebih efisien dari pada penduga rasio Upadhayaya dan Singh.

3. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{ST})$,

$$\sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2}\gamma_h(S_{yh}^{\ 2} + \lambda_i(\lambda_i S_{xh}^{\ 2} - 2S_{yxh})) < \sum_{h=1}^{k} \omega_h^{\ 2}\gamma_h(S_{yh}^{\ 2} + \theta(\theta S_{xh}^{\ 2} - 2S_{yxh}\ \ ))$$

$$\lambda_i(\lambda_i S_{xh}^{\ 2} - 2S_{yxh}) < \theta(\theta S_{xh}^{\ 2} - 2S_{yxh})$$

$$\lambda_i^{\ 2} S_{xh}^{\ 2} - 2\lambda_i S_{yxh} < \theta^2 S_{xh}^{\ 2} - 2\theta S_{yxh}$$

$$\lambda_i^{\ 2} S_{xh}^{\ 2} - \theta^2 S_{xh}^{\ 2} < 2\lambda_i S_{yxh} - 2\theta S_{yxh}$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i^{\ 2} - \theta^2) < 2S_{yxh}(\lambda_i - \theta)$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i + \theta)(\lambda_i - \theta) < 2S_{yxh}^{\ 2}(\lambda_i - \theta)$$

$$S_{xh}^{\ 2}(\lambda_i + \theta) < 2S_{yxh}$$

3.1 $(\lambda_i + \theta)S_{xh}^{\ 2} < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \theta$

3.2 $(\lambda_i + \theta)S_{xh}^{\ 2} > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \theta$

jika salah satu persamaan 3.1 dan 3.2 terpenuhi, maka penduga rasio Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio Singh dan Tailor. Dan jika sebaliknya maka penduga rasio Singh dan Tailor lebih efisien dari pada penduga rasio Upadhayaya dan Singh.

4. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{prj})$, $i = 1,2,3,4;$ $j = 1,2,3,4$ dan $i \neq j$

$$\sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh})) < \sum_{h=1}^{k} \omega_h{}^2 \gamma_h (S_{yh}{}^2 + \lambda_j (\lambda_j S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}))$$

$$\lambda_i (\lambda_i S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh}) < \lambda_j (\lambda_j S_{xh}{}^2 - 2S_{yxh})$$

$$\lambda_i{}^2 S_{xh}{}^2 - 2\lambda_i S_{yxh} < \lambda_j{}^2 S_{xh}{}^2 - 2\lambda_j S_{yxh}$$

$$\lambda_i{}^2 S_{xh}{}^2 - \lambda_j{}^2 S_{xh}{}^2 < 2\lambda_i S_{yxh} - 2\lambda_j S_{yxh}$$

$$S_{xh}{}^2 (\lambda_i{}^2 - \lambda_j{}^2) < 2S_{yxh} (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$S_{xh}{}^2 (\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j) < 2S_{yxh}{}^2 (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$S_{xh}{}^2 (\lambda_i + \lambda_j) < 2S_{yxh}$$

4.1 $(\lambda_i + \lambda_j) S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \lambda_j$

4.2 $(\lambda_i + \lambda_j) S_{xh}{}^2 > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \lambda_j$

jika salah satu persamaan 4.1 dan 4.2 terpenuhi, maka penduga rasio Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio lainnya. Dan jika sebaliknya maka penduga rasio yang lainnya lebih efisien dari pada penduga rasio Upadhayaya dan Singh.

### 4.5 Aplikasi

Data jumlah buah apel dan jumlah pohon apel di desa Turki tahun 1999

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N=854 | $N_1$=106 | $N_2$=106 | $N_3$=94 | $N_4$=171 | $N_5$=204 | $N_6$=173 |
| N=140 | $n_1$=9 | $n_2$=17 | $n_3$=38 | $n_4$=67 | $n_5$=7 | $n_6$=2 |
| $\overline{X}$=37600 | $\overline{X}_1$=24375 | $\overline{X}_2$=27421 | $\overline{X}_3$=72409 | $\overline{X}_4$=74365 | $\overline{X}_5$=26441 | $\overline{X}_6$=9844 |
| $\overline{Y}$=2930 | $\overline{Y}_1$=1536 | $\overline{Y}_2$=2212 | $\overline{Y}_3$=9384 | $\overline{Y}_4$=5588 | $\overline{Y}_5$=96 | $\overline{Y}_6$=404 |
| $\beta_x$=312.07 | $\beta_{x1}$=25.71 | $\beta_{x2}$=34.57 | $\beta_{x3}$=26.14 | $\beta_{x4}$=97.60 | $\beta_{x5}$=27.47 | $\beta_{x6}$=2810 |
| $C_x$=3.84 | $C_{x1}$=2.02 | $C_{x2}$=2.10 | $C_{x3}$=2.22 | $C_{x4}$=3.84 | $C_{x5}$=1.72 | $\beta_{x6}$=1.91 |
| $C_y$=5.84 | $C_{y1}$=4.18 | $C_{y2}$=5.22 | $C_{y3}$=3.19 | $C_{y4}$=5.13 | $C_{y5}$=2.47 | $C_{y6}$=2.34 |
| $S_x$=14479 | $S_{x1}$=49189 | $S_{x2}$=57461 | $S_{x3}$=160757 | $S_{x4}$=285603 | $S_{x5}$=45403 | $S_{x6}$=18794 |
| $S_y$=17106 | $S_{y1}$=6425 | $S_{y2}$=11552 | $S_{y3}$=29907 | $S_{y4}$=28643 | $S_{y5}$=2390 | $S_{y6}$=946 |
| $\rho$=0.92 | $\rho_1$=0.102 | $\rho_2$=0. 049 | $\rho_3$=0.016 | $\rho_4$=0.009 | $\rho_5$=0.71 | $\rho_6$=0.89 |
| | $\gamma_1$=0.10 | $\gamma_2$=0.049 | $\gamma_3$=0.016 | $\gamma_4$=0.009 | $\gamma_5$=0.138 | $\gamma_6$=0.006 |
| | $\omega_1{}^2$=0.015 | $\omega_2{}^2$=0.015 | $\omega_3{}^2$=0.012 | $\omega_4{}^2$=0.04 | $\omega_5{}^2$=0.05 | $\omega_6{}^2$=0.041 |

1. $\lambda_i S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh})$ jika $\lambda_i > 0$

untuk $\lambda_1 =$ 0,02024

diperoleh sebagai berikut:

424343367 < 4953732328

untuk $\lambda_2 =$ 0,0846922

diperoleh sebagai berikut:

1775598407 < 4953732328

untuk $\lambda_3 =$ 0,0002497

diperoleh sebagai berikut:

5235146,65 < 4953732328

untuk $\lambda_4 =$ 0,0839444

diperoleh sebagai berikut:

1759919005 < 4953732328

karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$ maka memenuhi persamaan 4.1 sehingga penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada rata-rata variansi.

2. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{RC})$,

$$S_{xh}{}^2(\lambda_i + \varpi) < 2S_{yxh}$$

2.1 $(\lambda_i + \varpi)S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \varpi$

2.2 $(\lambda_i + \varpi)S_{xh}{}^2 > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \varpi$

untuk $\lambda_2 =$ 0,0846922 dan $\varpi =$ 0,077926

diperoleh sebagai berikut:

3409330751 < 4953732328

untuk $\lambda_4 =$ 0,0839444

diperoleh sebagai berikut:

3393651349 < 4953732328

karena $\lambda_2, \lambda_4 > \varpi$ maka memenuhi persamaan 2.1 maka penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio gabungan.

3. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{ST}),$

$$S_{xh}{}^2(\lambda_i + \theta) < 2S_{yxh}$$

3.1 $(\lambda_i + \theta)S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \theta$

3.2 $(\lambda_i + \theta)S_{xh}{}^2 > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \theta$

untuk $\lambda_2 =$0,0846922 dan $\theta =$ 0,077924

diperoleh sebagai berikut:

3409290777 < 4953732328

untuk $\lambda_4 =$ 0,0839444

diperoleh sebagai berikut:

3393611376 < 4953732328

karena $\lambda_2, \lambda_4 > \theta$ maka memenuhi persamaan 3.1 sehingga penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio Singh dan Tailor.

4. $MSE(\bar{y}_{pri}) < MSE(\bar{y}_{prj})$

$$S_{xh}{}^2(\lambda_i + \lambda_j) < 2S_{yxh}$$

4.1 $(\lambda_i + \lambda_j)S_{xh}{}^2 < 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i > \lambda_j$

4.2 $(\lambda_i + \lambda_j)S_{xh}{}^2 > 2S_{yxh}$ jika $\lambda_i < \lambda_j$

untuk $\lambda_2 =$0,0846922 dan $\lambda_4 =$ 0,0839444

diperoleh sebagai berikut:

3535517411 < 4953732328

karena $\lambda_2 > \lambda_4$ maka memenuhi persamaan 4.1 sehingga penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio lainnya.

# BAB V

# PENUTUP

Mengakhiri penulisan skripsi ini, penulis mencoba menarik suatu kesimpulan dan saran dari pembahasan yang telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya.

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab IV, dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada rata-rata variansi.
2. Penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio gabungan.
3. Penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio Singh dan Tailor.
4. Penduga rasio yang diajukan oleh Upadhayaya dan Singh lebih efisien dari pada penduga rasio lainnya.

## 5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya membahas Penggunaan MSE (*Mean Square Error*) dalam Menentukan Penduga Rasio yang Efisien pada Sampling Acak Berstrata saja . Maka bagi konsumen atau pembaca yang ingin melanjutkan tugas akhir ini dapat menggunakan penduga rasio lainnya pada sampling acak berstrata atau dapat juga menggunakan sampling acak lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA


Cochran, William G. *Teknik Penarikan Sampel Edisi Ketiga.* Jakarta: Universitas Indonesia, 1991.

Dudewicz, Edward, J dan Mishra, Satya, N. *Statistika Matematika Modern.* Bandung: ITB, 1995.

Kadilar, C And Cingi, H. An Improvement in Estimating the Population Mean by Using the Correlation Coefficient, *Biometrical Journal* 35 (1), 103 – 109, 2006.

Kadilar, C. And Cingi, H. New Ratio Estimators Using Correlation Coefficient, *Biometrical Journal*, 1– 10, 2000.

Kadilar, C. And Cingi, H. Ratio Estimators in Stratified Random Sampling, *Biometrical Journal* 45 (2), 218– 225, 2003.

Kraaikamp, C, Dekking, F.M, Lopuha, H.P. And Meester, L.E . *A Modern Introduction to Probability and Statistics*. United States of America, 2005.

Martono, Koko. *Kalkulus.* Institut Teknologi Bandung: Erlangga, 1999.

Raj, Des. *Sampling Theory*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company LTD, 1971.

Supranto, M, A. *Teknik Sampling untuk Survei dan Eksperimen*. Rineka Cipta, 1992.

Walpole, Ronald, E. Myers, Raymond, H. and Myers, Sharon, L. *Probability and Statisctics for Engineers and Scientists.* United States of America, 1998.

Yendra, Rado. *Teori Probabilita.* Pekanbaru: Suska Press, 2008.